

Interaktive Tafelbilder: Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeiten

Dieser Leitfaden gibt einen Überblick über den inhaltlichen und didaktischen Zusammenhang der Medien der Interaktiven Tafelbilder „Kombinatorik“, „Wahrscheinlichkeiten“ und „Statistik“. Allgemeine Informationen zur Nutzung sowie zum didaktischen Konzept der Interaktiven Tafelbilder gibt es in der Handreichung „Wissenswertes zum Arbeiten mit dem Interaktiven Tafelbild“, die auch im Medienpaket enthalten ist.

1 Methodisch-Didaktische Hinführung

1.1 Motivation für das Thema

Das Thema Stochastik mit seinen Teilgebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie das Thema Kombinatorik sind längst in der Grundschule angekommen. Bildungsstandards und Lehrpläne für das Fach Mathematik sehen die Behandlung dieser Themen in allen vier Klassenstufen vor.

Speziell im Lehrplan-Bereich der sachbezogenen Mathematik werden das „Entnehmen und Darstellen von Informationen in Bildern, Tabellen und Schaubildern“, aber auch explizit das Lösen von „Aufgaben zur Kombinatorik“ gefordert.

Zu den konkreten Bildungsstandards für inhaltsbezogene Kompetenzen gehören das Systematische Zählen von Möglichkeiten (Kombinatorik), das Einschätzen und Vergleichen von Gewinnchancen bei Zufallsexperimenten (Wahrscheinlichkeit) sowie das Erfassen von Daten und Häufigkeiten (Statistik) in Beobachtungen, Untersuchungen und Experimenten und deren Darstellung in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen.

Dadurch werden wiederum mathematische Fähigkeiten wie das Verständnis für das Zählprinzip, die Problemlösefähigkeit sowie das logische Denken angeregt und weiterentwickelt.

Entscheidend ist in der Grundschule in den Themenbereichen Stochastik und Kombinatorik die Verzahnung der drei Ebenen enaktiv (handelnd), ikonisch (bildlich) und symbolisch. Aus diesem Grund sind die folgenden Materialien und Beispiele so ausgewählt, dass sie für die Schülerinnen und Schüler aus dem Alltag bekannt sind, motivieren und zum Handeln anregen (enaktive Ebene). Nach der Verbildlichung der Situationen sollen die Kinder aus ihren Erfahrungen heraus angeregt werden, sich eigene Notationsmöglichkeiten (symbolische Ebene) zu überlegen und diese zu vergleichen.

1.2 Medienauswahl

Die mediale Umsetzung der Themen Stochastik und Kombinatorik erfolgt in einer großen Anzahl von Medien. Wollte man sie alle in einem einzigen Tafelbild unterbringen, ginge das auf Kosten der Übersichtlichkeit. Daher wurden die Medien nach den einzelnen Bereichen Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten gruppiert und auf drei „kleinere“ Tafelbilder verteilt. Diese Tafelbilder enthalten folgende Medien:

Interaktives Tafelbild „Statistik“

- 1 Foto (Titelbild) zur Verdeutlichung des Alltagsbezugs
- 1 Grafik zum Thema Erfassen von statistischen Daten
- 1 interaktive Grafik zum Erfassen bzw. Darstellen von statistischen Daten
- 4 druckbare Arbeitsblätter (eines mit Lösungsblatt) mit Aufgaben zur Statistik
- 1 Linkliste mit weiterführenden Links zum Thema.

Interaktives Tafelbild „Kombinatorik“

- 1 Foto (Titelbild) zur Verdeutlichung des Alltagsbezugs
- 1 Grafik zum Thema Zahlenkombinationen
- interaktive Grafiken zur Darstellung von kombinatorischen Ergebnissen als Zeichnung, Tabelle und Baumdiagramm
- druckbare Arbeitsblätter mit Aufgaben zur Kombinatorik (mit Lösungsblättern)
- 1 Linkliste mit weiterführenden Links zum Thema.

Interaktives Tafelbild „Wahrscheinlichkeiten“

- 1 Foto (Titelbild) zur Verdeutlichung des Alltagsbezugs
- 1 interaktive Grafik zu Wahrscheinlichkeiten von Würfeleregebnissen
- interaktive Übungsaufgaben (Lückentext und Zuordnungsaufgabe)
- Experimentieranleitungen: Stichprobenexperiment (mit Lösungsblatt) und Würfelexperiment
- 1 druckbares Arbeitsblatt mit Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten (mit Lösungsblatt)
- Linkliste mit weiterführenden Links zum Thema.

1.3 Hintergrundinformationen für die Lehrkraft

Die Medien der Interaktiven Tafelbilder können einzeln und unabhängig voneinander eingesetzt werden. Doch lebendiger wird der Unterricht sicher im Zusammenhang. Zu diesem Zweck empfiehlt sich die Erarbeitung der drei Teilthemen in folgenden Schritten, wobei die jeweiligen beispielhaften Aufgaben zur Erarbeitung im Klassenverband für alle Klassenstufen geeignet sind, die passenden Übungen für die Einzelarbeit aber teilweise in zwei Schwierigkeitsstufen (Klasse 1-2 bzw. 3-4) untergliedert sind:

Statistik

- Entnahme und Vergleich von Informationen aus einem Schaubild
- Erfassen von Daten und Häufigkeiten und grafische Darstellung der Ergebnisse
- Lösen verschiedener Aufgaben zur Statistik

Kombinatorik

- Zeichnerische Darstellung von kombinatorischen Aufgaben
- Darstellung von kombinatorischen Aufgaben in Diagrammen
- Tabellarische Darstellung von kombinatorischen Aufgaben
- Lösen verschiedener Aufgaben zur Kombinatorik

Wahrscheinlichkeit

- Kennenlernen der Begrifflichkeiten
- Vermuten und Testen von Wahrscheinlichkeiten
- Gewinnchancen einschätzen, überprüfen und festhalten
- Lösen verschiedener Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Medien der Tafelbilder keine vollständige Unterrichtssequenz bieten können, sondern von der Lehrkraft durch weitere Beispiele und Übungen sinnvoll ergänzt werden müssen.

Zudem sollte die Lehrkraft vorab jeweils geeignete Sozial- und Arbeitsformen wählen, die dem Wissensstand der Kinder entsprechen.

Tipp: Mathematik-Konferenzen, bei denen die Schülerinnen und Schüler in Gruppen vorab mögliche Lösungen „erfinden“ und diskutieren, bieten sich bei nahezu allen Medien an.

Vertiefende Links zu den drei Teilthemen sind jeweils in einer Linkliste zusammengestellt:

Medien



„Linkliste zum Interaktiven Tafelbild ‚Statistik‘“



„Linkliste zum Interaktiven Tafelbild ‚Kombinatorik‘“



„Linkliste zum Interaktiven Tafelbild ‚Wahrscheinlichkeiten‘“

2 Interaktives Tafelbild „Statistik“

Statistik ist die Erhebung von Daten und Häufigkeiten durch Befragung oder Beobachtung und deren Darstellung in Diagrammen oder Tabellen.

2.1 Entnahme und Vergleich von Informationen aus einem Schaubild

Aufgabe

Welche sind die beliebtesten Hobbys bei Kindern?

Ziele

- Lesen einfacher Diagramme
- Entnehmen von Informationen
- Begriffsbildung (mehr/weniger als, gleich viele, am wenigsten/meisten)
- Ermitteln und Darstellen von Daten

Umsetzung

Aus einem Säulendiagramm, das interaktiv aufgebaut werden kann, sollen die Schülerinnen und Schüler Anzahlen ablesen, vergleichen und verbalisieren.

Medium



„Welche sind die beliebtesten Hobbys bei Kindern?“

Auf dem zugehörigen Arbeitsblatt können die Schülerinnen und Schüler die Daten aus dem Säulendiagramm in eine Tabelle eintragen. Im Anschluss daran sind Aussagen zu den Inhalten des Säulendiagramms als richtig oder falsch zu bewerten.

Medium



„Beliebte Hobbys bei Kindern“ (mit Lösungsblatt)

Tipp: Als Übung können die Schülerinnen und der Schüler die Hobbys der Kinder in der Klasse erfragen und selbst ein Schaubild erstellen.

2.2 Erfassen von Daten und Häufigkeiten und grafische Darstellung der Ergebnisse

Aufgabe 1

Welche Haustiere haben die Kinder unserer Klasse?

Ziele

- Sammeln von Daten und Größen
- Darstellen in Tabellen und Diagrammen
- Begriffsbildung (mehr/weniger als, gleich viele, am wenigsten/meisten)

Umsetzung

Bei den Aufgaben des Arbeitsblatts erfassen die Schülerinnen und Schüler selbst Daten in der Klasse zur Anwendung des Gelernten, hier am Beispiel „Haustiere“. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle in Form einer Strichliste festgehalten. Dann werden die Ergebnisse in einem Balkendiagramm dargestellt. Im Anschluss daran sind Fragen zu Ergebnissen der Datenerhebung zu formulieren, um sie dann im Klassenverband zu beantworten.

Medium



„Welche Haustiere haben die Kinder unserer Klasse?“

Aufgabe 2

Finde auf dem Bild Daten oder Größen, die du in Tabellen darstellen und vergleichen kannst.

Ziele

- Sammeln von Daten und Größen
- Darstellen in Tabellen und Diagrammen
- Begriffsbildung (mehr/weniger als, gleich viele, am wenigsten/meisten)

Umsetzung

Einem Bild sollen die Kinder Informationen entnehmen (Anzahlen von Pflanzen, Tieren usw.), diese darstellen und vergleichen, um das Gelernte nochmals selbstständig anzuwenden.

Medium



„Landschaftsbild mit Pflanzen und Tieren“

2.3 Lösen verschiedener Aufgaben zur Statistik

Diese Arbeitsblätter in zwei Schwierigkeitsgraden (Klasse 1-2 und 3-4) jeweils mit Zusatzaufgabe für besonders „schnelle“ Schülerinnen und Schüler bieten Themenvorschläge, zu denen die Kinder Daten und Häufigkeiten in der Klasse oder der Schule erfassen und grafisch darstellen können.

Medien



„Daten sammeln und darstellen (Klasse 1-2)“



„Daten sammeln und darstellen (Klasse 3-4)“

Ein Lösungsblatt kann hier aufgrund der von Klasse zu Klasse verschiedenen Daten nicht vorgegeben werden. Wichtig ist also, die erstellten Schaubilder gemeinsam zu kontrollieren und vor allem die Ergebnisse mittels der gelernten Begriffe zu verbalisieren.

3 Interaktives Tafelbild „Kombinatorik“

Unter Kombinatorik versteht man das systematische Zählen von Möglichkeiten. Die Ergebnisse können grafisch (in Zeichnungen oder Diagrammen) oder tabellarisch dargestellt werden. Die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten wird dann daraus abgelesen. Die Lösungen können auch rechnerisch ermittelt werden.

3.1 Zeichnerische Darstellung von kombinatorischen Aufgaben

Aufgabe

Drei Freunde wollen auf ein gemeinsames Foto – Welche Kombinationsmöglichkeiten haben sie, sich aufzustellen?

Ziele

- Sachsituationen mit kombinatorischem Inhalt verstehen und verbalisieren
- Einfache Zeichnungen erstellen

Umsetzung

Bevor die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Aufstellungsmöglichkeiten in einer Grafik darstellen, sollen sie die Situation real erleben und die Möglichkeiten ausprobieren (enaktive Ebene). Drei Kinder stellen sich in unterschiedlichen Reihenfolgen auf und verbalisieren dabei, wer wo steht.

Nun wird die grafische Darstellung kombinatorischer Aufgaben interaktiv erarbeitet, indem Zeichnungen von drei Kindern in beliebigen Kombinationen in „Bilderrahmen“ gezogen werden (ikonische Ebene):

Medium



„Gesichter für Fotos kombinieren (Zeichnung)“

Hinweis: Eine mögliche richtige Kombination kann über den entsprechenden Button eingeblendet werden.

Im Anschluss sollen die Schülerinnen und Schüler weitere, einfachere zeichnerische Notationsmöglichkeiten dieser Aufgabe finden (Strichmännchen, Buchstaben usw.), um die für sie übersichtlichste Variante zur späteren Anwendung bei der Lösung ähnlicher Aufgaben zu entdecken (symbolische Ebene).

3.2 Darstellung von kombinatorischen Aufgaben in Diagrammen

Aufgabe

Thomas hat drei Hosen und drei T-Shirts in unterschiedlichen Farben – Welche Möglichkeiten hat er, sich anzuziehen?

Ziele

- Sachsituationen mit kombinatorischem Inhalt verstehen und verbalisieren
- Darstellung in einem Baumdiagramm

Umsetzung

Bevor die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten in einem Diagramm darstellen, sollen sie die Situation real erleben und Kombinationen ausprobieren. Echte Kleidung oder Puppenkleidung wird also unterschiedlich miteinander kombiniert, die Ergebnisse dabei verbalisiert (enaktive Ebene).

Nun wird die Darstellung der Ergebnisse in einem Baumdiagramm interaktiv erarbeitet. Die Kinder sollen später bei ähnlichen Aufgaben selbstständig Diagramme anfertigen:

Medium



„Hosen und T-Shirts kombinieren (Baumdiagramm)“

Hinweis: Eine mögliche richtige Kombination kann über den entsprechenden Button eingeblendet werden.

Im Anschluss können noch Möglichkeiten gesucht werden, das Diagramm einfacher zu gestalten, indem z. B. Abkürzungen verwendet werden (symbolische Ebene).

3.3 Tabellarische Darstellung von kombinatorischen Aufgaben

Aufgabe

Thomas hat drei Hosen und drei T-Shirts in unterschiedlichen Farben – Welche Möglichkeiten hat er, sich anzuziehen?

Ziele

- Sachsituationen mit kombinatorischem Inhalt verstehen und verbalisieren
- Ergebnisse in einer Tabelle darstellen
- Rechnerische Lösung finden

Umsetzung

In dieser Grafik können die Schülerinnen und Schüler grafische Symbole von Hosen und T-Shirts in beliebigen Kombinationen in eine Tabelle mit zwei Spalten ziehen. Die gefundenen Kombinationen müssen verbalisiert werden:

Medium



„Hosen und T-Shirts kombinieren (Tabelle)“

Hinweis: Eine mögliche richtige Kombination kann über den entsprechenden Button eingeblendet werden.

Anschließend wird die rechnerische Lösung erarbeitet ($3 \times 3 = 9$). Die Schülerinnen und Schüler müssen diesen Rechenweg nicht anwenden können, für einige Kinder kann er aber hilfreich bei der Lösungsfindung sein oder zur Überprüfung dienen.

3.4 Lösen verschiedener Aufgaben zu Kombinatorik

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch Ausprobieren dreistellige Zahlencodes (zusätzlich fünfstellige für Schnelle) für ein Fahrradschloss finden. Hierfür sollen sie Ziffernkärtchen 1 – 9 verwenden (Ausschneidebogen im Arbeitsblatt enthalten). Im Anschluss daran sollen sie Überlegungen zur Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten anstellen. Anhand des Lösungsblattes kann im Klassenverband die Lösung systematisch mittels rechnerischer Lösung und Darstellung im Diagramm erarbeitet und so das Gelernte angewandt werden:

Medium



„Kombiniere Zahlen!“ (mit Lösungsblatt)

Die Grafik mit den Zahlenschlössern aus dem Arbeitsblatt ist auch als einzelnes Bild verfügbar und kann z. B. handschriftlich an der interaktiven Tafel ausgefüllt werden.

Medium



„Kombinationsmöglichkeiten Zahlenschloss“

Die beiden folgenden Arbeitsblätter (zwei Schwierigkeitsgrade: Klasse 1-2 und 3-4), jeweils mit Lösungsblatt, bieten verschiedene Übungsaufgaben zur Kombinatorik. Bei Klasse 1-2 ist eine der drei zu erarbeitenden Darstellungsformen vorgegeben, in Klasse 3-4 sollen die Schülerinnen und Schüler selbst die sinnvollste wählen:

Medien



„Finde die möglichen Kombinationen! (Klasse 1-2)“ (mit Lösungsblatt)



„Finde die möglichen Kombinationen! (Klasse 3-4)“ (mit Lösungsblatt)

4 Interaktives Tafelbild „Wahrscheinlichkeit“

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Einstufung von Aussagen und Urteilen nach dem Grad der Gewissheit. Ein Ereignis kann demnach sicher, möglicherweise, unmöglich, wahrscheinlich, oder unwahrscheinlich eintreten.

Zur Feststellung der Wahrscheinlichkeit können Zufallsexperimente durchgeführt werden, deren Ergebnisse man in Strichlisten oder Tabellen darstellt.

4.1 Kennenlernen der Begrifflichkeiten

Aufgabe

Fülle die Lücken mit den Begriffen sicher, möglich, unmöglich, wahrscheinlich oder unwahrscheinlich!

Ziele

- Erste Erfahrungen zur Wahrscheinlichkeit
- Begriffsbildung (sicher, möglich, unmöglich, wahrscheinlich oder unwahrscheinlich)

Umsetzung

In diesem Lückentext werden die Begriffe sicher, möglich, unmöglich, wahrscheinlich und unwahrscheinlich anhand von Alltagssituationen erarbeitet.

Medium



„Wahrscheinlichkeiten im Alltag (Lückentext)“

4.2 Vermuten und Testen von Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe

Du würfelst mit zwei Würfeln! Welcher Summenwert kommt bei 50 Würfeln am häufigsten vor?

Ziele

- Erfahrungen zur Wahrscheinlichkeit
- Begriffsbildung (sicher, möglich, unmöglich, wahrscheinlich oder unwahrscheinlich)
- Darstellen der Ergebnisse eines Zufallsexperiments in einer Tabelle

Umsetzung

Vor der Durchführung des Zufallsexperiments sollen die Schülerinnen und Schüler Vermutungen anstellen, welche Summenwerte in Frage kommen und wie hoch der Grad der Wahrscheinlichkeit ist. Die Ergebnisse werden in einer Strichliste festgehalten, die erlernten Begriffe je nach Häufigkeit der Werte in einem Lückentext eingesetzt:

Medium



„Wahrscheinlichkeiten: Würfelexperiment“

Im Anschluss an das Experiment werden im Klassenverband alle möglichen Würfelkombinationen erarbeitet. Falls einige Schülerinnen und Schüler diese schon selbst gefunden haben (siehe Zusatzaufgabe in der Experimentieranleitung), so können diese ihre Ergebnisse präsentieren. Als Zusammenfassung des Gelernten oder alternativ zum Experiment zur Erarbeitung des Themas kann auch eine interaktive Grafik eingesetzt werden, die die möglichen Würfelkombinationen für ausgewählte Würfelsummen zeigt:

Medium



„Würfelsummen“

Vertiefend kann eine Zuordnungsaufgabe interaktiv bearbeitet werden, in der nochmals die gelernten Begriffe und Möglichkeiten abgefragt werden:

Medium



„Häufigkeiten von Würfelergebnissen (Zuordnungsaufgabe)“

Hinweis: Die interaktive Aufgabe dient auch als Lösungsblatt für den Lückentext in der Experimentieranleitung.

4.3 Gewinnchancen einschätzen, überprüfen und festhalten

Aufgabe

Ziehe aus jedem Becher eine Spielfigur!

Ziele

- Gewinnchancen bei Zufallsexperimenten einschätzen und überprüfen
- Begriffsbildung (sicher, möglich, unmöglich, wahrscheinlich oder unwahrscheinlich)
- Darstellen der Ergebnisse in einer Tabelle

Umsetzung

In Gruppen sollen die Kinder aus verschiedenen gefüllten Bechern Spielfiguren ziehen und die Ergebnisse in einer Tabelle festhalten. Anschließend werden die Ergebnisse der fünf Becher verglichen und Vermutungen angestellt, warum die Ergebnisse unterschiedlich sind. Diese Vermutungen werden anhand des Inhalts der mit unterschiedlich vielen roten und blauen Spielfiguren gefüllten Becher überprüft. Anschließend werden die Erkenntnisse in einem Lückentext (Lösungsblatt vorhanden) mit den erlernten Begrifflichkeiten verbalisiert:

Medium



„Stichprobenexperiment“ (mit Lösungsblatt)

Zur Vorbereitung für den Lehrer gibt es hier einige Hinweise:

Medium



„Stichprobenexperiment“ (Lehrerinfo)

4.4 Lösen verschiedener Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit

Auf einem Arbeitsblatt müssen Experimente und Denkaufgaben (inkl. zwei Zusatzaufgaben für Schnelle) zur Wahrscheinlichkeit gelöst werden. Ein Lösungsblatt dient zur Kontrolle und sollte im Klassenverband besprochen werden, um Begründungen der Ergebnisse zu formulieren.

Medium



„Was ist sicher, möglich, unmöglich?“ (mit Lösungsblatt)